УДК 517.984

Ю. Д. Головатый

О ВЛИЯНИИ СИЛЬНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛОТНОСТИ НА СПЕКТР КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В работе изучены собственные частоты и собственные колебания среды с сингулярными возмущениями плотности. Исследовано предельное при $\varepsilon \to 0$ поведение спектра оператора Лапласа в ограниченной области с краевыми условиями Неймана относительно плотности $\rho_\varepsilon(x) = p(x) + \sum_{k=1}^{l} \varepsilon^{-m_k} q_k\left(\frac{x - x^{(k)}}{\varepsilon}\right)$. Здесь q_k — функции с компактным носителем, $x^{(1)}, \ldots, x^{(l)}$ — фиксированные точки области. Показано, что в зависимости от значения $M = \max\{m_1, \ldots, m_l\}$ существуют пять разных случаев поведения собственных значений и собственных функций этой задачи ($M < 2$, $M = 2$, $2 < M < 3$, $M = 3$ и $M > 3$. Во всех случаях получены так называемые теоремы сходимости: найдены главные члены асимптотики и оценена величина невязки.

1. Постановка задачи. В работе изучается предельное при $\varepsilon \to 0$ поведение собственных значений $\lambda(\varepsilon)$ и собственных функций u_ε задачи

$$\Delta u_\varepsilon(x) + \lambda(\varepsilon)\left(p(x) + \sum_{k=1}^{l} \varepsilon^{-m_k} q_k(\varepsilon^{-1}(x - x^{(k)}))\right) u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{1}$$

$$\partial u_\varepsilon/\partial n = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладким вектором внешней нормали n. Положительная измеримая плотность p возмущается в окрестности точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ из Ω функциями специального вида: $q_k(\xi)$ — ограниченная положительная функция в $\bar{\omega}_k$ и $q_k(\xi) = 0$ вне ω_k, где ω_k — ограниченная область, содержащая начало координат, $\xi = \varepsilon^{-1}(x - x^{(k)})$, m_k — вещественный параметр.

В работах [3, 4] изучено поведение спектра уравнения (1) с $l = 1$ и условиями Дирихле на $\partial\Omega$. Доказано, что существует три разных случая предельного поведения спектра ($m_1 < 2$, $m_1 = 2$, $m_1 > 2$). Асимптотические разложения простых собственных значений и собственных функций этой задачи построены и обоснованы С. А. Назаровым, О. А. Олейник и автором в работе [1].

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство.

Лемма 1. Пусть $A : H \to H$ самосопряженный положительный компактный оператор, а вектор $(\mu, u) \in \mathbb{R} \times H$ такой, что $\| Au - \mu u \|_H \leqslant \beta$ и $\| u \|_H = 1$, $\beta > 0$. Тогда для любого $d \geqslant \beta$ существует пара $(\mu_i, \tilde{u}) \in \mathbb{R} \times H$, где μ_i — собственное значение оператора A, и $\| \tilde{u} \|_H = 1$, что

$$|\mu_i - \mu| \leqslant \beta, \quad \| u - \tilde{u} \|_H \leqslant 2d^{-1}\beta.$$

При этом, $\tilde{u}$ — линейная комбинация собственных векторов оператора A, соответствующих собственным значениям из интервала $[\mu - d, \mu + d]$.

Пусть M и N — подпространства в H, а P_M и P_N — соответствующие ортопроекторы. Раствором между подпространствами M и N назовем величину $\Theta_H(M, N) = \| P_M - P_N \|$.

Лемма 2. Если $\dim M = \dim N = r < +\infty$ и для любого вектора $v \in N$ существует такой вектор $u \in M$, что $\| u - v \|_H \leqslant \beta$, $\| u \|_H = \| v \|_H$ и $0 < \beta < r^{-1}$, то $\Theta_H(M, N) \leqslant C(r)\beta$.

Изучим вначале задачу (1), (2) для $l = 1$, $x^{(1)} = 0$, $q_1 = q$, $\omega_1 = \omega$ и $m_1 = m$:

$$\Delta u_\varepsilon + \lambda(\varepsilon)(p(x) + \varepsilon^{-m} q(x/\varepsilon)) u_\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega, \ \partial u_\varepsilon/\partial n = 0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{3}$$

В случае когда q — характеристическая функция области ω, $m \geqslant 3$ — целые, асимптотические разложения $\lambda(\varepsilon)$ и u_ε получены в [2].

Занумеруем собственные значения (с. з.) задачи (3) в порядке возрастания с учетом кратности

$$0 = \lambda_1(\varepsilon) < \lambda_2(\varepsilon) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k(\varepsilon) \leqslant \cdots \to \infty, \quad k \to \infty,$$

и пусть $\{u_\varepsilon^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — соответствующие собственные функции (с. ф.).

2. Поведение $\lambda(\varepsilon)$ и u_1 в случае $m < 2$. Введем гильбертово пространство $H^1(\Omega)$, полученное пополнением $C^\infty(\Omega)$ по норме $\|u\|_1 = (\int_\Omega (u^2 + |\nabla u|^2)\,dx)^{1/2}$. Согласно вариационному принципу Куранта с. з. $\lambda_k(\varepsilon)$ — суть непрерывные функции параметра ε, ограниченные при $\varepsilon \to 0$. Например, $0 \leqslant \lambda_k(\varepsilon) \leqslant \lambda^{(k)}$, где $0 = \lambda^{(1)} < \lambda^{(2)} \leqslant \ldots$ — с. з. невозмущенной задачи

$$\Delta v + \lambda p v = 0 \text{ в } \Omega, \; \partial v/\partial n = 0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{4}$$

Введем в $H^1(\Omega)$ следующие пространства: V_λ — собственное подпространство, отвечающее с. з. λ задачи (4), $V_\varkappa(\varepsilon)$ — пространство, порожденное теми с. ф. $u_\varepsilon^{(k)}$ задачи (3), для которых $\lambda_k(\varepsilon) \to \varkappa$ при $\varepsilon \to 0$. Когда $m < 2$, возмущение плотности в задаче (3) является слабым, а именно, непрерывное вложение пространства $H_1(\Omega) \subset L_6(\Omega)$ влечет оценку

$$\varepsilon^{-m} \int_{\varepsilon\omega} q u^2 dx \leqslant C\varepsilon^{-m} \left(\int_{\varepsilon\omega} dx\right)^{3/2} \left(\int_{\varepsilon\omega} u^6 dx\right)^{1/3} \leqslant C_1 \varepsilon^{2-m} \|u\|_1^2. \tag{5}$$

Здесь $\varepsilon\omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon^{-1}x \in \omega\}$. Используя (5), непосредственно из вариационного принципа можно получить утверждение.

Теорема 1. Пусть $m < 2$, а $\lambda_k(\varepsilon)$ и $\lambda^{(k)}$ — с. з. задач (3) и (4) соответственно. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$|\lambda_k(\varepsilon) - \lambda^{(k)}| \leqslant C(k)\,\varepsilon^{2-m}, \quad \Theta_{H^1(\Omega)}(V_\lambda(\varepsilon), V_\lambda) \leqslant C(r)\,\varepsilon^{2-m},$$

где λ — с. з. задачи (4), кратности r, т. е. $\lambda = \lambda^{(i)} = \ldots = \lambda^{(i+r-1)}$ и $\lambda^{(i-1)} < \lambda < \lambda^{(i+r)}$.

Величина раствора между подпространствами $V_\lambda(\varepsilon)$ и V_λ оценивается при помощи лемм 1 и 2.

3. Вспомогательные утверждения для случая $m \geqslant 2$. Введем гильбертово пространство

$$H_\varepsilon = \left\{u \in H^1(\varepsilon^{-1}\Omega) : \int_{\varepsilon^{-1}\Omega} p(\varepsilon\xi)\,u(\xi)\,d\xi = 0\right\}$$

со скалярным произведением и нормой

$$\{u, v\}_\varepsilon = \int_{\varepsilon^{-1}\Omega} \nabla u \nabla v\,d\xi, \quad \|u\|_\varepsilon = \{u, u\}_\varepsilon^{1/2},$$

где $\xi = x/\varepsilon$, $\varepsilon^{-1}\Omega = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon\xi \in \Omega\}$. Произведем в задаче (3) замены переменной $x \mapsto \xi = \varepsilon^{-1}x$ и спектрального параметра $\lambda(\varepsilon) \mapsto \mu(\varepsilon) = \varepsilon^{2-m}\lambda(\varepsilon)$ и представим с. ф. u_ε в виде $u_\varepsilon = v_\varepsilon + C_\varepsilon$, где $v_\varepsilon \in H_\varepsilon$. Интегрируя уравнение (3) по области $\varepsilon^{-1}\Omega$, получаем

$$C_\varepsilon = (\varepsilon^{m-3}p_0 + q_0)^{-1} \int_\omega q v_\varepsilon d\xi,$$

где $p_0 = \int_\Omega p(x)\,dx$, $q_0 = \int_\omega q(\xi)\,d\xi$. Тогда при $\lambda(\varepsilon) \neq 0$ интегральное тождество

$$\int_{\varepsilon^{-1}\Omega} \nabla v_\varepsilon \nabla \varphi d\xi - \mu(\varepsilon)\Bigg(\varepsilon^m \int_{\varepsilon^{-1}\Omega} p v_\varepsilon \varphi d\xi + \int_\omega q v_\varepsilon \varphi d\xi -$$

$$- \alpha(\varepsilon, m) \int_\omega q v_\varepsilon d\xi \int_\omega q\varphi d\xi\Bigg) = 0, \quad \varphi \in H_\varepsilon, \tag{6}$$

где $\alpha(\varepsilon, m) = (\varepsilon^{m-3}p_0 + q_0)^{-1}$, эквивалентно задаче (3). Введем в H_ε оператор B_ε, определенный билинейной формой

$$(B_\varepsilon u, v)_\varepsilon = \int_\omega quvd\xi - \alpha(\varepsilon, m)\int_\omega qud\xi \int_\omega qvd\xi + \varepsilon^m \int_{\varepsilon^{-1}\Omega} puvd\xi.$$

Тогда задача (3) при $\lambda(\varepsilon) \neq 0$ эквивалентна спектральному уравнению

$$B_\varepsilon u - \mu(\varepsilon)^{-1} u = 0. \tag{7}$$

В пространстве $\mathscr{H}$, полученном пополнением $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ по норме $(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v|^2 d\xi)^{1/2}$, рассмотрим спектральное уравнение

$$\Delta_\xi w + \mu q(\xi)\left(w - b\int_\omega qwd\eta\right) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^3, \ w \in \mathscr{H}, \tag{8}$$

где b — постоянная.

Лемма 3. Если $b \leqslant q_0^{-1}$, то уравнение (8) имеет бесконечную последовательность собственных значений

$$0 \leqslant \mu^{(1)} \leqslant \mu^{(2)} \leqslant \cdots \leqslant \mu^{(k)} \leqslant \cdots \to \infty, \quad h \to \infty.$$

Для соответствующих с. ф. w справедливо асимптотическое разложение

$$w(\xi) = \sum_{s=0}^{S} |\xi|^{-1-s}\Phi_s(\xi|\xi|^{-1}) + O(|\xi|^{-2-S}), \quad |\xi| \to \infty, \tag{9}$$

которое можно почленно дифференцировать. Коэффициенты Φ_s — конечные линейные комбинации сферических функций, $\Phi_0 = \mathrm{const}$.

Доказательство. Оператор $B: \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, порожденный билинейной формой

$$(Bu, v)_{\mathscr{H}} = \int_\omega quvd\xi - b\int_\omega qud\xi \int_\omega qvd\xi,$$

является самосопряженным и неотрицательным при $b \leqslant q_0^{-1}$. Кроме того, вместе с оператором $\mathscr{H} \ni v \mapsto qv \in L_2(\omega)$ он компактен. Разложение (9) есть следствие того, что w — гармоническая функция вне области ω. Лемма доказана.

Лемма 4. Существует постоянная $c_0 > 0$, такая, что

$$\mu_1(\varepsilon) = \varepsilon^{2-m}\lambda_1(\varepsilon) \geqslant c_0.$$

Доказательство. Пусть $\mu_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а соответствующая с. ф. v_ε нормирована в H_ε. Из тождества (6) имеем

$$\mu_1(\varepsilon)(1 - q_0\alpha(\varepsilon, m))\int_\omega qv_\varepsilon^2 d\xi \leqslant 1 + c\varepsilon^{m-2}.$$

Следовательно, $\{w_\varepsilon = (\mu_1(\varepsilon)(1 - q_0\alpha))^{1/2}v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — ограниченная последовательность в $H^1(\omega)$ и предкомпактная в $L_2(\omega)$. Пусть некоторая ее подпоследовательность сходится к функции v_* в $L_2(\omega)$ при $\varepsilon' \to 0$. Предельный переход при $\varepsilon' \to 0$ в тождестве (6) для $\varphi = v_\varepsilon$ дает равенство $q_0^{-1}(\int_\omega qv_* d\xi)^2 = 1$. Значит, $v_* \not\equiv 0$ в области ω.

Рассмотрим функцию-срезку $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, равную единице в окрестности точки $x = 0$, и положим $\zeta_\varepsilon(\xi) = \zeta(\varepsilon\xi)$. Тогда функция $\zeta_\varepsilon v_\varepsilon$, продолженная нулем вне $\varepsilon^{-1}\Omega$, принадлежит $\mathscr{H}$. Легко показать, что условие $\|v_\varepsilon\|_\varepsilon = 1$ влечет ограниченность последовательности $\{\zeta_\varepsilon v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ в $\mathscr{H}$. Поскольку $\mu_1(\varepsilon) \to 0$, то $\zeta_\varepsilon w_\varepsilon \to 0$ слабо в $\mathscr{H}$, а также $w_\varepsilon \to 0$ в $L_2(\omega)$ при $\varepsilon' \to 0$. Тогда $v_* \equiv 0$ в области ω. Получили противоречие. Лемма доказана.

4. Поведение с. з. $\lambda(\varepsilon)$ и с. ф. u_1 в случаях $2 < m < 3$, $m = 3$ и $m > 3$.

Лемма 5. Пусть $\mu(\varepsilon) \to \mu^* \neq 0$ и $\zeta_\varepsilon v_\varepsilon \to v_*$ слабо в $\mathscr{H}$ по некоторой подпоследовательности $\varepsilon' \to 0$, где $\mu(\varepsilon)$, v_ε — с. з. и с. ф. уравнения (8) с постоянной $b = b(m)$, где $b(m) = 0$ при $2 < m < 3$, $b(3) = (p_0 + q_0)^{-1}$ и $b(m) = q_0^{-1}$ при $m > 3$.

Доказательство. Поскольку $\|v_\varepsilon\|_\varepsilon = 1$, то последовательность $\{v_\varepsilon - \bar{v}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ предкомпактна в $L_2(\omega)$ согласно неравенству Пуанкаре. Здесь $\bar{w} = q_0^{-1}\int\limits_\omega qw d\xi$. Поэтому $v_\varepsilon - \bar{v}_\varepsilon \to v_* - \bar{v}_*$ в $L_2(\omega)$. Переходя в тождество (6) к пределу для $\varphi = v_\varepsilon - \bar{v}_\varepsilon$, получаем, что $1 - \mu^*\int\limits_\omega q(v_* - \bar{v}_*)^2 d\xi = 0$. Следовательно, $v_* \not\equiv 0$.

Пусть функция $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$ равняется нулю в той окрестности точки $x = 0$, где функция ζ из леммы 4 равна единице и

$$\int\limits_\Omega p(x)\Phi(x)\,dx = 1.$$

Для произвольной функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ и достаточно малых ε построим функцию

$$\psi_\varepsilon(\xi) = \psi(\xi) - \varepsilon^3 \int\limits_{\varepsilon^{-1}\Omega} p(\varepsilon\xi)\psi(\xi)\,d\xi\,\Phi(\varepsilon\xi),$$

принадлежащую пространству H_ε и совпадающую с ψ на любом компакте.

Подставляя в (6) пробную функцию φ_0, равную единице в окрестности ω, получаем $(1 - q_0\alpha(\varepsilon, m))\left|\int\limits_\omega qv_\varepsilon d\xi\right| \leqslant C\|\varphi_0\|_\varepsilon = C_1$. Последовательность $\left\{w_\varepsilon = v_\varepsilon - \alpha(\varepsilon, m)\int\limits_\omega qv_\varepsilon d\xi\right\}_{\varepsilon>0}$ предкомпактна в $L_2(\omega)$, поскольку $\|w_\varepsilon\|_\varepsilon = \|v_\varepsilon\|_\varepsilon = 1$ и

$$\int\limits_\omega w_\varepsilon^2 d\xi \leqslant c(1 + (1 - q_0\alpha(\varepsilon, m))^2 q_0^2\bar{v}_\varepsilon^2) \leqslant C_2.$$

Поэтому при $\varphi = \psi_\varepsilon$ и $\varepsilon' \to 0$ тождество (6) принимает вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \nabla v_*\nabla\psi d\xi - \mu^*\left(\int\limits_\omega qv_*\psi d\xi - b(m)\int\limits_\omega qv_* d\xi \int\limits_\omega q\psi d\xi\right) = 0$$

для всех $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Лемма доказана.

Введем пространство $W_\varkappa(\varepsilon) \subset H_\varepsilon$, порожденное теми с. ф. $v_\varepsilon^{(k)}$ задачи (7), для которых $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mu_k(\varepsilon) = \varkappa$.

Лемма 6. Пусть μ и w — с. з. и с. ф. спектрального уравнения (8) с коэффициентом $b(m)$. Тогда существует с. з. $\mu(\varepsilon)$ задачи (7), что $\mu(\varepsilon) \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$, т. е. $W_\mu(\varepsilon)$ не пусто. Существует последовательность $\{w_\varepsilon \in W_\mu(\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ такая, что $w_\varepsilon \to w$ в H^1_{loc}. Кроме того, имеют место оценки

$$|\mu(\varepsilon) - \mu| \leqslant c(\mu)\,\varepsilon^{\beta(m)}, \quad \|w|_{\varepsilon^{-1}\Omega} - w_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant C_1\varepsilon^{\beta(m)},$$

где $\beta(m) = \min(m - 2,\ 3 - m)$ для $2 \leqslant m < 3$, $\beta(3) = 1/2$, $\beta(m) = \min(m - 3, 3/2)$ для $m > 3$.

Доказательство. Пусть η — гладкая функция, равная нулю вблизи нуля, единице в окрестности бесконечности и такая, что

$$\int\limits_\Omega |x|^{-1}p(x)\eta(x)\,dx = 1.$$

Пусть пока $m \leqslant 3$. Положим $\gamma_\varepsilon = \varepsilon^2\int\limits_{\varepsilon^{-1}\Omega} p(\varepsilon\xi)w(\xi)\,d\xi$. В силу разложения (9) постоянная γ_ε ограничена при $\varepsilon \to 0$. Тогда можно показать, что число μ^{-1} и функция $S_\varepsilon(\xi) = w(\xi) - \gamma_\varepsilon|\xi|^{-1}\eta(\varepsilon\xi)$ из H_ε являются почти-собственным значением почти-собственной функцией оператора $B_\varepsilon : \|B_\varepsilon S_\varepsilon -$

$-\mu^{-1}S_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant c(\varepsilon^{m-2}+\varepsilon^{3-m})$ при $2 < m < 3$ и $\|B_\varepsilon S_\varepsilon - \mu^{-1}S_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant$ $\leqslant C\varepsilon^{1/2}$ при $m = 3$.

Легко проверить, что в случае $m > 3$ коэффициент Φ_0 в разложении (9) функции w равен нулю, т. е. $w(\xi) = O(|\xi|^{-2})$, $|\xi| \to \infty$. Выбрав почти-собственную функцию в виде

$$S_\varepsilon(\xi) = w(\xi) - \gamma_\varepsilon |\xi|^{-2}\eta(\varepsilon\xi),$$

где $\int\limits_\Omega |x|^{-2} p(x)\eta(x)\,dx = 1$ и $\gamma_\varepsilon = \varepsilon \int\limits_{\varepsilon^{-1}\Omega} p(\varepsilon\xi) w(\xi)\,d\xi$, получим оценку

$$\|B_\varepsilon S_\varepsilon - \mu^{-1}S_\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant c(\varepsilon^{m-3}+\varepsilon^{3/2}).$$

Доказательство завершается применением леммы 1. Лемма доказана.

Пусть V_μ — собственное подпространство в $\mathscr{H}$, отвечающее с. з. μ уравнения (8). Законность предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ в условии ортонормированности $\{v_\varepsilon^{(i)},\ v_\varepsilon^{(j)}\}_\varepsilon = \delta^{ij}$, δ^{ij} — символ Кронекера, равносильна следующему утверждению.

Лемма 7. $\dim V_\mu = \dim W_\mu(\varepsilon)$.

Итак, пусть $0 \leqslant \mu_1(m) \leqslant \mu_2(m) \leqslant \ldots$ — с. з. уравнения (8) с коэффициентом $b = b(m)$, а $w_i(m;\ \xi), \ldots, w_{i+r-1}(m;\ \xi)$ — базис в собственном подпространстве V_μ, отвечающему с. з. μ кратности r. Обозначим через $U_\mu(\varepsilon)$ подпространство в $H^1(\Omega)$, порожденное сужениями на Ω функций $w_s(m;\ \varepsilon^{-1}x) + b(m)\int\limits_\omega q w_s d\xi$, $s = i\ldots, i+r-1$.

Теорема 2. Для $m > 2$ и $k \geqslant 2$ справедливы неравенства

$$|\lambda_k(\varepsilon) - \mu_{k-1}(m)\varepsilon^{m-2}| \leqslant c(k)\varepsilon^{\beta(m)+m-2},$$
$$\Theta_{H^1(\Omega)}(U_\mu(\varepsilon),\ V_\mu(\varepsilon)) \leqslant C(r)\varepsilon^{\beta(m)},$$

где $\beta(m)$ определено в лемме 6. Здесь $V_\mu(\varepsilon)$ — подпространство, образованное теми с. ф. $u_\varepsilon^{(i)}$ задачи (3), для которых $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \lambda_i(\varepsilon)\varepsilon^{2-m} = \mu$.

Доказательство содержится в леммах 2, 4—7.

5. Случай $m = 2$. В качестве «предельной» задачи рассмотрим прямую сумму спектральных задач

$$\begin{gathered}\Delta v + \lambda p v = 0 \text{ в } \Omega,\ \partial v/\partial n = 0 \text{ на } \partial\Omega,\\ \Delta_\xi w + \lambda q w = 0 \text{ в } \mathbb{R}^3,\quad w \in \mathscr{H}.\end{gathered} \tag{10}$$

Пусть $\{\bar\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — с. з., $\{(v_k,\ w_k)\}_{k=1}^\infty$ — собственные векторы задачи (10). Введем пространство $U_{\bar\lambda}(\varepsilon)$, порожденное функциями на области Ω: $v_i(x) + w_i(\varepsilon^{-1}x), \ldots, v_{i+r-1}(x) + w_{i+r-1}(\varepsilon^{-1}x)$, где $\bar\lambda = \bar\lambda_i = \cdots = \bar\lambda_{i+r-1}$, $\bar\lambda_{i-1} < \bar\lambda < \bar\lambda_{i+r}$.

Теорема 3. Для $m = 2$ справедливы неравенства

$$|\lambda_k(\varepsilon) - \bar\lambda_k| \leqslant c(k)\varepsilon^{1/2},\quad \Theta_{H^1(\Omega)}(V_{\bar\lambda}(\varepsilon),\ U_{\bar\lambda}(\varepsilon)) \leqslant C_1\varepsilon^{1/2}.$$

Доказывается теорема методами п. 2 и 4 с незначительными изменениями.

6. Окончательный результат. Итак, вернемся к задаче (1), (2). Пусть $0 = \lambda_1(\varepsilon) < \lambda_2(\varepsilon) \leqslant \ldots$ — с. з. этой задачи. Предположим, что точки $x^{(k)}$, вблизи которых возмущается задача, занумерованы так, что $m_1 \geqslant m_2 \geqslant$ $\geqslant \ldots \geqslant m_l$, и пусть $M = \max\{m_1, \ldots, m_l\}$ и $M = m_1 = \ldots = m_s > m_{s+1}$. Тогда:

а) если $M < 2$, поведение с. з. $\lambda(\varepsilon)$ и с. ф. u_ε задачи (1), (2) полностью описывается теоремой 1;

б) если $M > 2$, то для $\lambda(\varepsilon)$ и u_ε задачи (1), (2) верны утверждения теоремы 2, в которой в качестве «предельной» спектральной задачи взята система

$$\Delta_\xi w + \mu q_k(\xi)\left(w - b_k(M)\int\limits_{\omega_k} q_k w\,d\xi\right) = 0,\quad \xi \in \mathbb{R}^3,\quad w \in \mathscr{H},\quad k = 1, \ldots, s, \tag{11}$$

где постоянные b_k определяются по функциям q_k так же, как в лемме 5 постоянная $b(m)$;

в) если же $M = 2$, то поведение с. з. и с. ф. задачи (1), (2) описывается теоремой 3, где «предельной» задачей будет прямая сумма уравнений (11) с $b_k = 0$ и задачи (4) при $\lambda = \mu$.

1. *Головатый Ю. Д., Назаров С. А., Олейник О. А.* Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задачи о колебании среды с концентрированными возмущениями // Тр. мат. ин-та АН СССР.— 1990.— **192.**— С. 42—60.
2. *Назаров С. А.* Об одной задаче Санчес-Паленсия с краевыми условиями Неймана // Изв. вузов. Математика.— 1989.— № 11.— С. 60—66.
3. *Олейник О. А.* О спектрах некоторых сингулярно возмущенных операторов // Успехи мат. наук.— 1987.— **42,** № 3.— С. 221—222.
4. *Sanchez-Palensia E.* Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses // Lect. Notes Phys.— 1984.— **195.**— P. 346—368.

Львов. ун-т Получено 20.10.90